Nullstellensuche nach dem Newtonschen Iterationsverfahren

Nach der Formelsammlung [1] lautet die Iterationsgleichung mit ihren Konvergenzbedingungen :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1}$$

Dabei ist :

$$f'(x_n) = \frac{d}{dx_n} f(x_n) \tag{2}$$

und :

x_{n+1} der Iterationsschritt Nachfolger von x_n . Die Randbedingungen, damit die Newton - Iteration funktioniert sind nach [1] :

$$f'(x_0) \neq 0 \tag{3}$$

$$f(x_0) * f''(x_0) > 0 \tag{4}$$

und das Vorzeichen von $f''(x)$ darf nicht wechseln (5)
(??? wo im Iterationsbereich ??? {Anmerkung des Autors}).

Der Startwert der Iteration ist hier mit x_0 definiert, der abgeschätzt werden muß !

Soweit zur kurzen mathematischen Theorie. Am besten begreift man solche Sachverhalte an einem Beispiel der Anwendung :-)

Ausgesucht wird eine Funktion die leicht, in ihren Eigenschaften, zu durchschauen ist. Die Auswahl trifft auf :

$$y = x^2 - 4 \tag{6}$$

Sie hat ihren Scheitel bei $x_S = -4$ und die Nulldurchgänge bei $x_{01} = -2$ und $x_{02} = +2$. Nimmt man an, die Gleichung währe nicht algebraisch zu lösen ! so währe die Suche nach den Nulldurchgängen der Funktion durch die x - Achse, wenn vorhanden, numerisch zu berechnen. {!!! Es ist dem Autor nicht bekannt, ob alle Gleichungen numerisch lösbar sind, auch wenn sie eine Lösung haben sollten !!!}

Beispiel der numerischen Wertesuche :

Die Funktion :

$$y = x^2 - 4 \tag{6}$$

soll nach Nullstellen mit dem Newton - Verfahren durchsucht werden.

Als erstes werden die 1. und 2. Ableitung der Funktion ermittelt :

$$y' = f'(x) = 2 * x \tag{7}$$

$$y'' = f''(x) = 2 \tag{8}$$

Der nächste Schritt ist die Abschätzung der Lösung der Gleichung, hier die Nullstellen - Ermittlung. Man kann zum Beispiel den Funktionsgraphen heranziehen um die Abschätzung zu treffen, es sind aber auch andere Verfahren tauglich.
Da hier die Nullstellen bekannt sind, wird der 1. Startwert für eine Nullstellennäherung auf :

$$x_0 = -6$$

gesetzt. Und die Treffergenauigkeit soll besser :

$$ABS(y_{soll} - y_{ist}) = F < 0,001 \tag{9}$$

sein. Nun werden die Konvergenz - Bedingungen überprüft ! Als erstes wird die Bedingung nach (3) begutachtet :

$$f'(x_0) = 2 * x_0 = 2 * (-6) = -12 \neq 0 \checkmark \tag{10}$$

Diese ist hier erfüllt. Die Nächste ist nach (4) :

$$f(x_0) * f''(x_0) = [(x_0^2 - 4)] * 2 =$$

$$= [(-6)^2 - 4] * 2 = 64 > 0 \checkmark \tag{11}$$

Die letzte Iterationsbedingung nach (5) ist leicht zu erfüllen, da in diesem Beispiel das Vorzeichen der 2. ten Ableitung über den gesammten Funktionsverlauf nicht wechsel kann. Diese Ableitung ist eine Konstante !!!

$$f''(x) = 2 \checkmark \tag{12}$$

Nun gehts zur eigendlichen Iterationsberechnung : (IS...) = Iterationsschritt

Der Startwert des 1. Iterationsschrittes :

$$x_0 \stackrel{!}{=} -6 \tag{IS10}$$

daraus wird der erste Ordinalwert y_0 errechnet, der hier den Wert $y = 0$ annehmen soll :

$$y_0 = x_0^2 - 4 = (-6)^2 - 4 = 32 \tag{IS 11}$$

Fehler zum gewünschten Wert nach (9) :

$$F_0 = ABS(y_{soll} - y_{ist}) = ABS(0 - (-32)) = 32 \tag{IS12}$$

Berechnung des neuen Abszissenwertes nach (1) :

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^2 - 4}{2 * x_0} = (-6) - \frac{(-6)^2 - 4}{2 * (-6)} = -3,333 \tag{IS13}$$

Neuer Startwert des 2. Iterationsschrittes :

$$x_1 \stackrel{!}{=} -3,333 \tag{IS20}$$

$$y_1 = x_1^2 - 4 = (-3,333)^2 - 4 = 7,109 \tag{IS21}$$

$$F_1 = ABS(y_{soll} - y_{ist}) = ABS(0 - (-7,109)) = -7,109 \tag{IS22}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^2 - 4}{2 * x_1} = (-3,333) - \frac{(-3,333)^2 - 4}{2 * (-3,333)} = -2,267 \tag{IS23}$$

Neuer Startwert des 3. Iterationsschrittes :

$$x_2 = -2,267 \tag{IS30}$$

$$y_2 = x_2^2 - 4 = (-2,267)^2 - 4 = 1,139 \tag{IS31}$$

$$F_2 = ABS(y_{soll} - y_{ist}) = ABS(0 - 1,139) = 1,139 \tag{IS32}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^2 - 4}{2 * x_2} = -2,267 - \frac{(-2,267)^2 - 4}{2 * (-2,267)} = -2,016 \tag{IS33}$$

Neuer Startwert des 4. Iterationsschrittes :

$$x_3 = -2{,}016 \tag{IS40}$$

$$y_3 = x_3^2 - 4 = (-2{,}016)^2 - 4 = 64{,}26m \tag{IS41}$$

$$F_3 = ABS(y_{soll} - y_{ist}) = ABS(0 - 64{,}26m) = 64{,}26m \tag{IS42}$$

$$x_4 = x_3 - \frac{x_3^2-4}{2*x_3} = -2{,}016 - \frac{(-2{,}016)^2-4}{2*(-2{,}016)} = -2{,}000 \tag{IS43}$$

Neuer Startwert des 5. Iterationsschrittes :

$$x_4 = -2{,}000 \tag{IS50}$$

$$y_4 = x_4^2 - 4 = (-2{,}000)^2 - 4 = 0{,}000 \tag{IS51}$$

$$F_4 = ABS(y_{soll} - y_{ist}) = ABS(0 - 0{,}000) = 0{,}000 \tag{IS51}$$

Damit ist der Fehler kleiner als 0,001 und die Abbruchbedingung erfüllt. Die Näherung für die erste Nullstelle liegt bei x_{01} = -2,000. Für die zeite Nullstelle wird die Iteration mit einem neuen Startwert begonnen, der sich in der Nähe derselben befindet. Andernfalls kann noch einmal, die schon gefundene Nullstelle getroffen werden.